

DEVOIR SURVEILLÉ n° 4 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures - La calculatrice n'est pas autorisée*Ce sujet comporte un exercice et deux problèmes indépendants.*

EXERCICE

Durée conseillée : 40 minutes - Barème envisagé : 3,5 points

Pour α et β des nombres réels, on définit lorsque cela a un sens les réels $I(\alpha)$ et $J(\beta)$ par :

$$I(\alpha) = \int_0^1 t^\alpha \arctan t \, dt \quad \text{et} \quad J(\beta) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\beta} dt$$

- 1) Étudier selon la valeur des paramètres α et β la convergence des intégrales $I(\alpha)$ et $J(\beta)$.
- 2) Donner la valeur de $I(0)$ et $I(1)$
- 3) Pour quelles valeurs de α le réel $I(\alpha) + J(\alpha + 2)$ est-il défini ?
 Dans ce cas, exprimer ce réel $I(\alpha) + J(\alpha + 2)$ simplement à l'aide de α . On pourra utiliser un changement de rielle
 En déduire la valeur de $J(2)$ et $J(3)$.

PROBLÈME n° 1

Durée conseillée : 2 heures - Barème envisagé : 10 points
première partie du sujet CENTRALE TSI 2007

Dans tout ce problème, a et v désignent deux nombres réels et a est strictement positif.

- I)** Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \frac{(\sin x)^2}{x^2}$ admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$
 On le note encore φ . Prouver que φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puis que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- II) 1)** Soit b un réel avec $0 < a < b$, montrer que : $\int_a^b \frac{\sin y}{y} dy = \left[\frac{1 - \cos y}{y} \right]_a^b + \int_{a/2}^{b/2} \varphi(x) dx$
- II) 2)** En déduire la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$ puis l'égalité $2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx$
- III)** Si $[\alpha, \beta]$ est un segment réel et si h est une application de classe C^1 de $[\alpha, \beta]$ dans $\mathbb{C}$, démontrer, à l'aide d'une intégration par parties que $\int_\alpha^\beta h(t) e^{itv} dt$ admet une limite lorsque v tend vers $+\infty$ qu'on déterminera.
- IV) 1)** Soit $n \in \mathbb{N}$ et h_n la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par : $h_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}$
 Justifier la convergence de l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n(t) dt$
- IV) 2)** Calculer I_0 puis, en calculant $I_{n+1} - I_n$ en déduire I_n .
- IV) 3)** Soit h l'application définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par : $h(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$
- a) Donner un développement limité de h d'ordre 1 en 0
 - b) En déduire que h admet un prolongement continu et dérivable à $[0, \frac{\pi}{2}]$. On le note encore h .
 Préciser $h(0)$ et $h'(0)$.
 - c) Montrer que h est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 - d) En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) h(t) dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$
 - e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$
 Montrer que cette intégrale est convergente puis que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

V) En utilisant une autre méthode, démontrer, d'autre part, que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$ puis de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2} dx$

VI) On considère à nouveau la fonction φ définie dans I et on pose, pour $u \in \mathbb{R}$, $\Psi_v(u) = a\varphi(a(v-u))$.

On a ainsi : $\Psi_v(v) = a\varphi(0)$ et, pour $u \neq v$, $\Psi_v(u) = \frac{\left(\sin(a(v-u))\right)^2}{a(v-u)^2}$

VI) 1) Montrer que Ψ_v est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

VI) 2) Montrer que, lorsque $v \rightarrow +\infty$, $\int_0^{+\infty} \Psi_v(u) du \rightarrow \pi$

PROBLÈME n° 2 *Durée conseillée : 1 h 20 - Barème envisagé : 6,5 points*
Un des trois exercices du sujet E3A PC 2006

E est l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

E_1 est le sous ensemble de E formé des fonctions f telles que l'intégrale $\int_x^{+\infty} f(t) \exp(-t) dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Étude de quelques exemples :

a) Montrer que $\int_x^{+\infty} \exp(-t) dt$ converge pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\int_x^{+\infty} t^n \exp(-t) dt$ converge pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

b) Soit x appartenant à $\mathbb{R}$, l'intégrale impropre $\int_x^{+\infty} \cos t \exp(-t) dt$ existe-t-elle ?

c) En déduire des exemples de fonctions appartenant à E_1 .

2) Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E .

3) Soit $\begin{bmatrix} \varphi : E_1 & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & F \end{bmatrix}$ où $F(x) = \exp(x) \int_x^{+\infty} f(t) \exp(-t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $F = F' + f$

b) Justifier que φ définit une application linéaire.

c) φ est-elle injective ?

d) Montrer que, si $f \in E_1$ est un vecteur propre de φ , alors f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. Déterminer alors les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .

e) Soit $f \in E_1$, bornée et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, montrer que la dérivée f' de f appartient à E_1 et que $\varphi(f') = (\varphi(f))'$

4) Soient $n \in \mathbb{N}$ et E_2 le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n .

a) Montrer que $E_2 \subset E_1$.

b) Soit Ψ la restriction de φ à E_2 . Montrer que Ψ est un endomorphisme de E_2 .

c) Est-ce un automorphisme ?

5) Soit $f \in E_2$. Montrer que, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geq 0$ alors

$$\sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) \geq 0 \quad \text{pour } x \geq a \quad \text{où } f^{(k)} \text{ est la dérivée } k\text{ième de } f$$

FIN DU SUJET