

DEVOIR SURVEILLÉ n° 5 DE MATHÉMATIQUES

*Durée : 4 heures - La calculatrice n'est pas autorisée**Ce sujet comporte trois problèmes indépendants.*

PROBLÈME n° 1

*Durée conseillée : 1h15 minutes - Barème envisagé : 6,5 points
d'après la partie II d'un sujet de la Banque PT 2008*

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les endomorphismes f et g dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_g = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que A_f et A_g sont diagonalisables.
- 2) Vérifier que les endomorphismes f et g commutent.
- 3) Déterminer les vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1. Vérifier que ces vecteurs sont aussi des vecteurs propres de g .
- 4) Donner le sous-espace propre de f associé à -1 et montrer que ce sev est stable par g .
- 5) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres communs à la fois pour f et pour g .
- 6) En déduire que les matrices A_f et A_g sont simultanément diagonalisables c'est à dire qu'il existe une matrice P qui est inversible et telle que les matrices $D_f = P^{-1}A_fP$ et $D_g = P^{-1}A_gP$ sont toutes les deux diagonales.
- 7) *Etude du cas général*
On suppose désormais que f et g sont deux endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) qui commutent.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f et $E_{\lambda_i}(f)$ le sous-espace propre associé à λ_i .
 - a) Que peut-on dire de la famille des sous-espaces propres $(E_{\lambda_i}(f))_{1 \leq i \leq p}$?
 - b) Justifier que $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par g . On note alors g_i l'endomorphisme induit par la restriction de g à $E_{\lambda_i}(f)$.
 - c) Prouver qu'il existe une base commune de diagonalisation pour f et g .

PROBLÈME n° 2

*Durée conseillée : 1 heure 30 - Barème envisagé : 7 points
première partie du sujet CCP PC 2007*

Pour a réel, soit M_a la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ donnée par :
$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -1+2a & 2+a \\ -3a & -2-a & 3+4a \end{pmatrix}$$

et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice M_a .

- 1) Déterminer, suivant les valeurs de a , le rang de la matrice $M_a - (1+3a)I_3$ où I_3 est la matrice identité.
Quelle valeur propre de M_a a-t-on ainsi mise en évidence ? Préciser la dimension du sous-espace propre associé.
- 2) Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M_a puis déterminer toutes les valeurs propres de M_a .

- 3) Montrer que, pour tout a réel, M_a est trigonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ et déterminer les réels a pour lesquels M_a est diagonalisable.
- 4) Dans cette question, on suppose $a = 1$
- Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale dans $M_3(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}M_1P = D$.
Donner alors une racine carrée de M_1 .
 - Montrer que la matrice $m = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées dans $M_2(\mathbb{R})$.
En déduire que M_1 a une infinité de racines carrées dans $M_3(\mathbb{R})$.
- 5) Dans cette question, on suppose que $a = 0$ et on pose $N = M_0 - I_3$.
Calculer N^2 et en déduire l'existence de réels α et β tels que $\alpha I_3 + \beta N$ soit une racine carrée de M_0 dans $M_3(\mathbb{R})$.
- 6) Dans cette question, on suppose que $a = -\frac{1}{3}$ et on note $u = f_{-\frac{1}{3}}$
- Déterminer tous les éléments $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{-\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans cette base soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Déterminer les matrices qui commutent avec U . En déduire que U ne possède pas de racine carrée dans $M_3(\mathbb{R})$.
 - La matrice $M_{-\frac{1}{3}}$ possède-t-elle une racine carrée dans $M_3(\mathbb{R})$?

PROBLÈME $n^\circ 3$

Durée conseillée : 1 h 15 - Barème envisagé : 6,5 points
Extrait d'un sujet CCP PSI de 2005

On souhaite étudier les propriétés de la fonction f définie, pour t réel, par : $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt^2}}{1+n^2}$

- Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- Étudier la fonction $\left[g_n : t \mapsto e^{-nt^2} \right]$ sur $[0, +\infty[$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
En déduire que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(t)$ sous la forme de la somme d'une série.
- La fonction f possède-t-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?
- Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction f . (On ne cherchera pas à préciser la valeur $f(0)$)
- Démontrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser, sans le démontrer, que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

FIN DU SUJET