

Exercices d'application

EXERCICE A-1 On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$

- 1) Démontrer que l'application $\left[f : P \mapsto (1 - X^2)P'' - 2XP' \right]$ est symétrique.
- 2) Donner la matrice de f dans la base canonique de E . Est-elle symétrique ?
- 3) Déterminer le spectre de f et en déduire que f est diagonalisable.

EXERCICE A-3/2 Racine carrée d'une matrice symétrique

On appelle racine carrée R d'une matrice carrée M d'ordre n toute matrice carrée d'ordre n vérifiant $R^2 = M$

- 1) Montrer que, si S est une matrice symétrique réelle d'ordre n , elle possède au moins une racine carrée dans $M_n(\mathbb{C})$
- 2) Si S est une matrice symétrique réelle d'ordre n positive c'est à dire que : $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXSX \geq 0$, démontrer que S possède alors au moins une racine carrée dans $M_n(\mathbb{R})$

EXERCICE A-2 Diagonaliser dans une base orthonormale la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ où b est un réel.

EXERCICE A-3 Si (\cdot, \cdot) est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , on fixe u un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n et on définit l'application f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = x - 2(x, u)u$$

Démontrer que f est un endomorphisme orthogonal qu'on identifiera.

EXERCICE A-4 On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $abc \neq 0$

Montrer que $I_3 + A$ est une matrice inversible puis que $(I_3 - A)(I_3 + A)^{-1} \in SO(3)$

EXERCICE A-5 Dans les questions suivantes, A est la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f si $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 2) Déterminer la matrice A sachant que f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe Vect(\vec{a}) où $\vec{a} = (1, 1, 1)$
- 3) Déterminer les coefficients inconnus de $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & 4 & ? \\ 4 & -1 & ? \\ -4 & ? & ? \end{pmatrix}$ pour que A soit orthogonale positive puis identifier la nature et les éléments caractéristiques de f .

EXERCICE A-6 Réduire l'équation et déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la conique ou de la quadrique d'équation

1) $31x^2 + 21y^2 + 10\sqrt{3}xy + 2(16 + 18\sqrt{3})x + 2(18 - 16\sqrt{3})y - 44 = 0$

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + y + z + 1 = 0$

3) $7x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2yz - 4xz + 4xy - 18 = 0$

EXERCICE A-7 On pose $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ déterminer le minimum et le maximum sur \mathcal{U} de l'application

$$\left[f : (x, y, z) \mapsto \frac{y^2 + xy - xz - yz}{x^2 + y^2 + z^2} \right]$$

Exercices d'entraînement

EXERCICE E-1 *Adjoint d'un endomorphisme* Notion non exigible en PC mais qui fait l'objet de nombreux problèmes

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

l'objectif de l'exercice est de démontrer l'existence et l'unicité d'un unique endomorphisme u^* de $L(E)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

- 1) On suppose que u^* existe.
 - a) Prouver l'unicité de u^*
 - b) Si on fixe une base orthonormée \mathcal{B} de E , exprimer la matrice de u^* dans \mathcal{B} à l'aide de celle de u dans \mathcal{B}
- 2) Justifier l'existence et l'unicité de u^* . u^* est l'endomorphisme adjoint ou simplement l'adjoint de u
- 3) Un endomorphisme symétrique est aussi appelé un endomorphisme auto-adjoint. Pourquoi ?
- 4) Si u est un endomorphisme orthogonal, montrer que $u^* = u^{-1}$

EXERCICE E-2 Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ qu'on munit du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$,

on définit l'application

$$\left[\begin{array}{ll} u : E & \rightarrow E \\ P & \mapsto \int_0^1 (X+t)^n P(t) dt \end{array} \right]$$

- 1) Montrer que u définit un endomorphisme symétrique de E .
- 2) En déduire qu'il existe une base (P_0, P_1, \dots, P_n) orthonormale de E telle que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad u(P_i) = \lambda_i P_i \quad \text{où } \lambda_i \in \mathbb{R}$$
- 3) Justifier alors que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y)$ et, en déduire, la trace de u .

EXERCICE E-3 Soit A une matrice carrée d'ordre n ,

- 1) Montrer que la matrice $A {}^t A$ est toujours diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$
- 2) On suppose que A et ${}^t A$ commutent et que les valeurs propres de $A {}^t A$ sont deux à deux distinctes. Montrer que A et $A {}^t A$ sont des matrices qui commutent puis, à l'aide d'un changement de bases, prouver que la matrice A est symétrique.