

Exercices de bilan**EXERCICE B-1** Révision sur les polynômes

1) Déterminer les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$

2) Si $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, donner le reste de la division euclidienne de

a) $X^n - 1$ par $P = X^2 - 1$ b) X^n par $P = (X+1)^2$

EXERCICE B-2 Sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$ on définit l'endomorphisme φ par :

$$\varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$$

1) Déterminer $\deg \varphi(P)$ en fonction du degré de P . En déduire le noyau de φ .

2) On définit la suite de polynômes $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $Q_0 = 1$ et : $Q_n = \varphi(X^n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
Démontrer que $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de E et que $\text{Im } \varphi$ est un hyperplan de E .

Exercices d'applications**EXERCICE A-1** Calculer les déterminants suivants :

$$1) \forall x \in \mathbb{R}, \quad D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} \quad 2) \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad D(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

$$2) \det(A_n) \quad \text{où} \quad A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{avec} \quad a_{ij} = \begin{cases} 3 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{si } i = j + 1 \\ 1 & \text{si } i = j - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

EXERCICE A-2 Soit V et W deux sev supplémentaires d'un \mathbb{K} ev E , on note

p la projection sur V parallèlement à W et $q = id_E - p$ et on fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ avec $\alpha \neq \beta$,
montrer que les sev de E stables par $f = \alpha p + \beta q$ sont les sev A de E tels que $A = A \cap V + A \cap W$

EXERCICE A-3 Si f est un endomorphisme d'un \mathbb{K} espace vectoriel E , démontrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$,

$$1) P(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Ker } f \subset \text{Ker } P(f) \\ \text{Im } P(f) \subset \text{Im } f \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \text{Ker } f \subset \text{Ker } P(f) \\ \text{Ker } f \neq \{0_E\} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \text{Im } P(f) \subset \text{Im } f \\ \text{Im } f \neq E \end{cases} \Rightarrow P(0) = 0$$

EXERCICE A-4 Utilisation d'un polynôme annulateur On donne $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1) Montrer que A possède un polynôme annulateur de degré 2.

2) En déduire que A est inversible et expliciter son inverse sans résoudre de système.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, donner le reste de la division euclidienne de X^n par P . En déduire A^n .

Exercices d'entraînement

EXERCICE E-1 Donner la trace et le déterminant de f où f est l'endomorphisme de transposition sur $M_n(\mathbb{K})$

EXERCICE E-2 Justifier que, pour tout polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$, le déterminant de la matrice compagnon $C(P(x))$ du polynôme P en $x \in \mathbb{K}$ vérifie :

$$\det(C(P(x))) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & \dots & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & x + a_{n-1} \end{vmatrix} = P(x)$$

EXERCICE E-3 (*Lemme des noyaux*)

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} ev E et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $\exists(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$, $UP + VQ = 1$

On dit que les polynômes P et Q sont premiers entre eux...

Démontrer que $\text{Ker}(PQ)(f) = \text{Ker} P(f) \oplus \text{Ker} Q(f)$

Classe de PC***TD du chapitre V : DÉTERMINANT ET POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES****INVERSE ET COMATRICE**

d'après CCP

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, on désigne par Δ_{ij} le cofacteur de l'élément a_{ij} de A

On appelle comatrice de A la matrice noté $\text{Com}(A)$ dont le coefficient i, j est Δ_{ij}

I) Étude d'un exemple

I-1) Si $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -6 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ Calculer $\det(M)$ puis le produit $M \times {}^t\text{Com}(M)$

I-2) Déterminer sous forme factorisée le polynôme $\chi_M(x) = \det(M - xI_3)$ (*c'est le polynôme caractéristique de M*)
Calculer $(I_3 + M)(2I_3 - M)$ puis la matrice $\chi_M(M)$

II) Cas général : Si $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ et si B est la matrice obtenue en remplaçant la j ème colonne de A par celle formée des coefficients $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$

II-1) Montrer que $\det(B) = \sum_{k=1}^n \beta_k \Delta_{kj}$ en déduire que, avec la convention $\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$$\forall (l, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \sum_{k=1}^n a_{kl} \Delta_{kj} = \det(A) \delta_j^l \quad \text{et} \quad \forall (l, i) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \sum_{k=1}^n a_{lk} \Delta_{ik} = \det(A) \delta_i^l$$

II-2) Prouver alors : $A \times {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A) \times A = \det(A)I_n$

On a donc prouvé I-1 dans le cas général. Le résultat de I-2 est général mais hors programme (c'est le théorème de Cayley-Hamilton)